Quasiisometrien und Gruppen

Gerrit Gruben

Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematik

18. Februar 2011

I Grundlegendes

Im folgendem sollen kurz notwendige Definitionen und Sätze für den Vortrag ohne Beweis zitiert werden.

Definition 1 (Notation).
Sei (M, d) ein metrischer Raum. Gegeben sei ein Punkt $x \in M$ und $r \geq 0$. Es sei

$$N(x, r) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq r\}$$

die abgeschlossene r-**Umgebung** von x in M. Für $Q \subseteq M$ wird auch $N(Q, r) := \bigcup_{y \in Q} N(y, r)$ geschrieben.

Q heißt r-**dicht** in M, wenn $N(Q, r) = M$ gilt. Ist Q für ein $r \geq 0$ r-dicht in M, dann heißt Q **kobeschränkt** in M. Der **Durchmesser** von Q ist

$$\operatorname{diam}(Q) := \sup \{d(x, y) \mid x, y \in Q\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Ist der Durchmesser einer Menge Q endlich, so heisst sie wie üblich **beschränkt**.

Definition 2 (Geodäten).
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heißt ein Weg $\gamma : I \to M$ im metrischen Raum (M, d) (normierte) **Geodäte**, wenn

$$d(\gamma(t), \gamma(u)) = |t - u|.$$

für alle t, u aus M gilt. Gilt $d(\gamma(t), \gamma(u)) = \lambda |t - u|$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so heißt γ (konstante) Geodäte. (M, d) nennen wir ein **geodätischen** Raum (**Längenraum**), wenn jedes Paar von Punkten durch (normierte) Geodäten verbunden werden kann. Ein metrischer Raum (M, d) heißt **eigentlich**, wenn er vollständig und lokalkompakt ist.

Es werden Gruppenoperationen auf metrischen Räumen betrachtet. Genauer sei X ein eigentlicher Längenraum und Γ eine Gruppe die darauf über Isometrien operiert. Man kann die Gruppenaktion nun als Gruppenhomomorphismus $\Gamma \to \operatorname{Isom}(X)$ von der Gruppe in die Menge der Isometrien von X auffassen. Dementsprechend hat man die Definition der Bahn/des Orbit Γx von $x \in X$ und des Stabilisators von $x \in X$: $\operatorname{stab}(x) := \{g \in \Gamma \mid gx = x\}$. Sie heißt **frei**, wenn nur das neutrale Element von Γ jedes $x \in X$ festhält. Das heisst es wird nur das neutrale Element auf $\operatorname{Id}_X \in \operatorname{Isom}(X)$ abgebildet.

Definition 3 (eigentlich diskontinuierlich).
So eine Gruppenaktion auf X heißt **eigentlich diskontinuierlich**, wenn für alle $r \geq 0$ und allen $x \in X$ die Menge

$$\{g \in \Gamma \mid d(x, gx) \leq r\}$$

endlich ist. Eine solche Aktion heißt **kokompakt** wenn ${}^{X}\!/_{\Gamma}$ kompakt ist. Hierbei bedeutet die Quotientenbildung mit Γ, dass Bahnen miteinander identifiziert werden.

Satz 1 (Charakterisierung von e.d.k. Aktionen).
Folgende Aussagen sind für eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenaktion auf einen metrischen Raum äquivalent:

1. Die Gruppenaktion ist kokompakt.
2. Ein Orbit ist kobeschränkt.
3. Alle Orbiten sind kobeschränkt.

Definition 4 (Quasiisometrien).
Eine Abbildung $\phi : X \to X'$ zwischen zwei metrischen Räumen (X, d) und (X', d') heißt **quasi-isometrisch**, wenn es Konstanten $k_1, \ldots, k_4 \geq 0$ gibt mit

$$k_1 d(x, y) - k_2 \leq d'(\phi(x), \phi(y)) \leq k_3 d(x, y) + k_4,$$

wobei sogar $k_1 > 0$ ist. Wenn $\operatorname{im} \phi$ für eine Konstante $k \geq 0$ k-dicht in X' liegt (d.h. ϕ ist kobeschränkt), dann heisst ϕ **Quasiisometrie**.

Anschaulich gesehen existiert eine Quasiisometrie zwischen zwei Räumen, wenn diese aus der Ferne betrachtet identisch aussehen.

II Konstruktionen

Definition 5 (Äquivarianz).
Sei $\phi : \Delta \to \Delta'$ eine Abbildung zwischen Caley-Graphen Δ, Δ' der selben Gruppe Γ. Dann heißt sie **äquivariant**, wenn für alle $x \in \Delta$, $g \in \Gamma$ gilt:

$$g\phi(x) = \phi(gx).$$

Satz 2 (endl. erz. Caley-Graphen sind quasiisometrisch).
Seien S, S' endliche Erzeugendensysteme einer Gruppe Γ, dann gibt es eine äquivariente Quasiisometrie

$$\Delta(\Gamma; S) \to \Delta(\Gamma; S').$$

Beweis
Seien d, d' die geodätischen Metriken auf $\Delta := \Delta(\Gamma; S)$ bzw. $\Delta' := \Delta(\Gamma; S')$. Es ist $S = \{a_1, \ldots, a_s\}$, $S' = \{b_1, \ldots, b_t\} \subseteq \Gamma$ mit $s, t \geq 1$. Da S' ein Erzeugendensystem von Γ ist, lässt sich für $i = 1, \ldots, s$ schreiben:

$$a_i = b_{1,i} \cdots b_{n_i,i}$$

für ein minimales n_i und $b_{j,i} \in S'$. Insbesondere können wir o. E. annehmen, dass wenn $a_i \in S$ dann ist auch $a_i^{-1} \in S$. Es gilt dann

$$n_i = d'(1, a_i) \leq \max\{d'(1, a) \mid a \in S\} =: r.$$

Erweitert man $\mathrm{Id}_\Gamma : V(\Delta) \to V(\Delta')$ auf eine Funktion $\phi : \Delta \to \Delta'$, die die Geodäte von v_1 nach $v_2 = v_1 a_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, s\}$ linear auf die Geodäte der Länge n_i abbildet und zwar $\phi(v_1) = v_1$ wird abgebildet auf $\phi(v_2) = v_1 a_i = v_2 b_{1,i} \cdots b_{n_i,i}$ über die Kanten assoziiert mit den Erzeugern $b_{1,i}$ bis $b_{n_i,i}$. Für diese Abbildung gilt nun die Ungleichungskette

$$d(x, y) \leq d'(\phi(x), \phi(y)) \leq rd(x, y) \ (x, y \in \Delta),$$

da jede Kante zwischen x und y durch maximal r viele durch ϕ ersetzt wird. Damit ist ϕ quasi-isometrisch.

Wird die umgekehrte Konstruktion durchgeführt, erhält man ein quasi-inverses ϕ' von ϕ und mit $r' = \max\{d(1, s') \mid s' \in S'\}$ ist die Verknüpfung beider Abbildungen nicht weiter als rr' von der Identitätsabbildung entfernt. Damit ist ϕ eine Quasiisometrie. (vgl. Bemerkung in [1]).

Sei nun $x \in \Delta$ und $g \in \Gamma$. Es muss $g\phi(x) = \phi(gx)$ gezeigt werden. Wenn $x \in V(\Delta)$ ist die Aussage klar, also sei x auf der Kante von v nach va_i für ein $i \in \{1, \dots, s\}$. Dann liegt $\phi(x)$ mit Abstand $n_i d(v,x)$ auf dem Kantenzug der durch die Multiplikationen von v $b_{1,i}, \dots, b_{n_i,i}$ nach va_i geht. Die Multiplikation mit g macht daraus eine Kante von vg über $b_{1,i}g, \dots, b_{n_i,i}g$ nach vga_i. Dabei liegt $g\phi(x)$ noch immer mit Abstand $n_i d(v,x)$ von vg auf der Geodäte. Umgekehrt entspricht liegt gx auf der Kante von v nach vga_i mit Abstand $d(v,x)$. Anwendung von ϕ ergibt nun $\phi(gx)$ der mit den selben Abstand wie $g\phi(x)$ auf der gleichen Geodäte/Kantenzug von vg nach vga_i liegt. Damit ist ϕ auch äquivariant. ■

Korollar 1.
Caley-Graphen von endlich erzeugten Gruppen sind bis auf Quasiisometrie eindeutig bestimmt. $\Delta(\Gamma) := [\Delta(\Gamma, S)]_\sim$ für eine Gruppe Γ und ein beliebiges endliches Erzeugendensystem S von Γ ist somit wohldefiniert, wobei $\sim$ die Quasiisometrie Relation zwischen metrischen Räumen bezeichnet.

Analog heißen zwei endlich erzeugte Gruppen Γ, Γ' quasi-isometrisch in Zeichen $\Gamma \sim \Gamma'$, wenn $\Delta(\Gamma) = \Delta(\Gamma')$.

Beispiele:

(1) Alle endlichen Gruppen sind quasi-isometrisch zueinander, denn ihre Caley-Graphen sind beschränkt.

(2) Wenn $p, q \geq 2$, dann $F_p \sim F_q$. Mit den freien Erzeugendensystemen sind die Caley-Graphen genau die beiden regulären Bäume T_{2p} und T_{2q}. Das folgt daraus, dass $T_n \sim T_m$ für $n, m \geq 3$.

(3) Für $p \geq 2$ gilt $F_p \not\sim \mathbb{Z}$, aber $F_1 \sim \mathbb{Z}$ (da $T_2 \sim \mathbb{Z}$). [1]

(4) $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mittels der Projektion auf die erste Koordinate.

Eine endlich erzeugte Gruppe Γ ist quasi-isometrisch zu einem Längenraum X, wenn $\Delta(\Gamma) \sim X$ gilt, in Zeichen $\Gamma \sim X$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{Z}$ (als Gruppe) $\sim \mathbb{R}$ (als metrischer Raum).

(2) $\mathbb{Z}^2 \sim \mathbb{R}^2$.

[1] Dass $T_{2p} \not\sim \mathbb{Z}$ für $p \geq 2$ wurde im Vortrag gezeigt, gehört aber eigentlich zum Vortrag davor.

In der folgenden Konstruktion operiert eine Gruppe Γ eigentlich diskontinuierlich kokompakt auf einen eigentlich Längenraum X. Es wird ein Punkt $a \in X$ fixiert und die Bahn Γa von a liegt dann r-dicht in X für ein $r \geq 0$ (siehe 1). Γ sei ein Graph mit Eckenmenge Γ und $gh \in E(\Gamma)$ gdw. $d(ga, ha) \leq 2r + 1 =: k$. Da die Aktion eigentlich diskontinuierlich wirkt, ist Δ lokal endlich. Diesen Graph nennen wir **k-Distanzgraph** auf der Bahn Γa in Zeichen $(\Delta(2r + 1; \Gamma a))$.

Satz 3 (Distanzgraph auf Bahnen ist zusammenhängend).
$\Delta(2r+1; \Gamma a)$ ist zusammenhängend (als Graph), wenn Γa r-dicht in X liegt.

Beweis
Seien ga und ha zwei Ecken aus Δ. Da $\Delta \subseteq X$, existiert eine Geodäte zwischen $x_0 := ga$ und ha. Nun lassen sich $x_1, \ldots, x_n := ha$ auf dieser Geodäte finden, so dass $d(x_i, x_{i+1}) \leq 1$ für $i = 0, \ldots, n-1$ gilt. Da Γa r-dicht in X liegt, existieren $g_i \in \Gamma$ mit $d(g_i a, x_i) \leq r$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Insgesamt folgt mit $i = 0, \ldots, n-1$ für die Abstände

$$d(g_i a, g_{i+1} a) \leq d(g_i a, x_i) + d(x_i, x_{i+1} + d(x_{i+1}, g_{i+1} a) \leq r + 1 + r = 2r + 1 = k,$$

so dass gilt $g_i a$ ist in Δ mit $g_{i+1} a$ mit einer Kante verbunden. Damit existiert aber ein Weg in Δ von g nach h. ∎

Diese Konstruktion liefert uns unmittelbar ein endliches Erzeugendensystem für die Gruppe Γ:

Satz 4 (e.d.k. wirkende Gruppen auf eigtl. Längenräume sind endl. erzeugt.).
Wenn Γ eigentlich diskontinuierlich kokompakt auf einen eigentlichen Längenraum X agiert, dann ist Γ endlich erzeugt.

Beweis
In der obigen Situation ist die Menge $A = \{g \in \Gamma \backslash \{1\} \mid d(a, ga) \leq k\}$ endlich und symmetrisch. Es ist $\Delta := \Delta(2r + 1, \Gamma a)$ genau der Caley-Graph $\Delta(\Gamma; A)$ bis auf die doppelten Kanten von Elementen der Ordnung 2. Denn für $g, h \in \Delta$ ist nach Anwendung der Isometrie g^{-1} $g^{-1}h \in A$ gdw. 1 und $g^{-1}h$ verbunden in Δ sind gdw. g und h eine gemeinsame Kante in Δ besitzen. Es ist A dann aber auch ein Erzeugendensystem der Gruppe Γ. ∎

Satz 5 (Quasiisometrie von e.d.k. Gruppenaktionen auf eigtl. Längenräume). Wenn Γ eigentlich diskontinuierlich kokompakt auf einen eigentlichen Längenraum X agiert, dann gilt $\Gamma \sim X$.

Beweis

Sei $a \in X$, $k = 2r + 1$ (Γa ist r-dicht in X). Es wird nun eine Quasiisometrie $f : \Delta := \Delta(2r+1; \Gamma a) \to \Gamma a \subseteq X$ konstruiert. Für $g \in \Gamma = V(\Delta)$ ist $f(g) = ga$ und $gh \in E(\Delta)$ wird linear auf eine Geodäte in X zwischen ga und ha abgebildet (dies kann auch äquivariant getan werden). Seien $g, h \in \Gamma$, dann können wir die Geodäte von ga und ha unterteilen in Punkte mit Abstand ≤ 1, wobei wir nicht mehr als Länge der Geodäte + einen Punkt benötigen. Analog zum Beweis von 3 finden wir einen Weg in Δ, also

$$d(f(g), f(h)) + 1 = d(ga, ha) + 1 \geq d_\Delta(g, h).$$

Umgekehrt gilt

$$d(f(g), f(h)) \leq k d_\Delta(g, h),$$

und $\operatorname{im} f = \Gamma a$ ist kobeschränkt in X. Da alle Punkte auf den Kanten beschränkten Abstand zu den adjazenten Ecken haben, folgt, dass f eine Quasiisometrie ist. Δ ist aber auch ein Caley-Graph von Γ und damit gilt $\Gamma \sim X$.■

Es folgt nun leicht ein Resultat aus der Gruppentheorie:

Korollar 2 (UGs mit endl. Index in endl. erz. Gruppen sind endl. erz.). Ist Γ endlich erzeugt und $G \leq \Gamma$ eine Untergruppe mit endlichen Index. Dann ist G endlich erzeugt und $G \sim \Gamma$.

Beweis

Sei Δ ein Caley-Graph von Γ. Die e. d. k Aktion $\Gamma \to \operatorname{Isom}(\Delta)$ eingeschränkt auf G ist eigentlich diskontinuierlich. Sie ist auch kokompakt, denn es ist

$$\Gamma = \bigsqcup_{i=1}^{m} G g_i$$

mit geeigneten $g_i \in \Gamma$. Die Bahn $\Gamma 1 = \Gamma$ ist kobeschränkt und liegt damit r-dicht in Δ für ein $r \geq 0$ per Definition. Nun liegt $G1 = G$ $\max(d(1, g_i)) + r$-dicht in Δ und damit ist die Bahn $G1$ kobeschränkt und damit ist die Aktion $G \to \operatorname{Isom}(\Delta)$ kokompakt. Es folgt nun $G \sim \Delta \sim \Gamma$. ■

III Kommensurabilität und virtuelle Eigenschaften von Gruppen

Definition 6 (Kommensurabel).
Zwei Gruppen Γ_1, Γ_2 heißen **kommensurabel** (lat. zusammen meßbar, in Zeichen $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$), wenn es Untergruppen $G_i \leq \Gamma_i$ mit $[\Gamma_i : G_i] < \infty$ für $i = 1, 2$ gibt, die zueinander isomorph sind ($G_1 \cong G_2$).

Bemerkung: Wenn $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ gilt, dann ist Γ_1 endlich erzeugt genau dann wenn Γ_2 endlich erzeugt ist. Dies liegt daran, dass auch jeweils die Untergruppen endlich erzeugt sind und sich diese Eigenschaft über die Isomorphie und dem endlichen Index wieder auf die andere Gruppe überträgt.

Satz 6 ($\approx$).
$\approx$ ist eine Äquivalenzrelation

Beweis
Es ist nur die Transitivität unklar. Dies folgt aber daraus, dass für zwei Untergruppen $U_1, U_2 \leq G$ mit endlichen Index, auch der Index $[U_j : U_1 \cap U_2]$ für $j = 1, 2$ endlich ist. ∎

Für endlich erzeugte Gruppen Γ_1, Γ_2 folgt aus der Kommensurabilität der beiden Gruppen, dass diese auch quasiisometrisch zueinander sind.

Definition 7 (Torsionsfrei).
Eine Gruppe Γ heißt **torsionsfrei**, wenn aus $g^n = 1$ folgt $g = 1$ für alle $g \in \Gamma$.

Definition 8 (virtuelle Eigenschaften).
Eine Gruppe Γ hat **virtuell** eine Eigenschaft, wenn es eine Untergruppe von Γ mit endlichem Index gibt, die diese Eigenschaft besitzt.

Satz 7 (Über virtuell $\mathbb{Z}$-sein).
Sei Γ eine endlich erzeugte Gruppe die quasiisometrisch zu $\mathbb{Z}$ ist ($\Gamma \sim \mathbb{Z}$). Dann ist Γ virtuell $\mathbb{Z}$.

Beweis
Angenommen es gibt ein $g \in \Gamma$ mit $\operatorname{ord} g = \infty$. Setze

$$G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$$

und die Behauptung ist, dass $[\Gamma : G] < \infty$.

Dazu sei Δ ein Caley-Graph (endl. Erzeugendensystem!). Es gilt dann:

$$d(g^n, g^m) = d(1, g^{m-n}),\ d(1, g^n) \longrightarrow \infty (n \to \infty)$$

Da $\Gamma \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{R}$ kann eine Quasiisometrie $\phi : \Delta \to \mathbb{R}$ gewählt werden. Setze

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ f(n) \mapsto \phi(g^n)$$

Das Bild von f ist kobeschränkt in $\mathbb{R}$. Denn es gilt wegen der Quasiisometrie

$$k_1 d(1, g^n) - k_2 \leq d(\phi(1), \phi(g^n)) = d(f(0), f(n))\ (\forall n \in \mathbb{Z})$$

für $k_1 > 0$ und $k_2 \geq 0$. Damit ist $|f(n)| \longrightarrow \infty (n \to \pm\infty)$. Ferner kann aus

$$k_1 d(g^{-n}, g^n) - k_2 = k_1 d(1, g^{2n}) - k_2 \leq d(\phi(g^{-n}), \phi(g^n) = d(f(-n), f(n))$$

gefolgert werden, dass $\lim_{n \to \infty}(|d(f(-n), f(n))|) = \infty$. Ohne Einschränkungen $f(n) \to \infty$ und $f(-n) \to -\infty$. Ferner gibt es $k_3, k_4 \geq 0$ mit:

$$|f(n) - f(n-1)| \leq d(\phi(g^n), \phi(g^{n-1})) \leq k_3 d(1, g) + k_4 =: r$$

womit $\operatorname{im} f$ r-dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

Da ϕ eine Quasiisometrie ist, folgt, dass $G = f^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq V(\Delta)$ kobeschränkt in Δ ist, also ist ${}^{\Delta}\!/_{G}$ ein endlicher Graph, also

$$[\Gamma : G] = \left| {}^{\Gamma}\!/_{G} \right| = |V({}^{\Delta}\!/_{G})| < \infty$$

wobei mit Γ/G die Menge an Rechtsnebenklassen von G in Γ gemeint ist.

Es verbleibt zu zeigen, dass es so ein Element gibt. Für diesen Teil wird auf [1] verwiesen. ∎

Frage: Wann folgt aus $\Gamma \sim \Gamma' \Rightarrow \Gamma \approx \Gamma'$?

Positive Beispiele:

(1) Wenn eine der Gruppen endlich ist, dann müssen beide endlich sein und die Aussage stimmt.

(2) Wenn Γ virtuell $\mathbb{Z}$ ist, dann folgt aus $[\Gamma : \mathbb{Z}] < \infty$, dass $\mathbb{Z} \sim \Gamma \sim \Gamma'$. Wäre Γ' nicht endlich erzeugt, dann wäre der Caleygraph nicht lokal endlich und damit kann keine Quasiisometrie von $\mathbb{Z}$ nach einem $\Delta(\Gamma')$ kobeschränkt sein. Also ist Γ' endlich erzeugt und damit virtuell $\mathbb{Z}$. Damit gilt aber auch $\Gamma \approx \Gamma'$.

(3) Seien Γ, Γ' endl. erzeugt und virtuell abelsch. Sei $G \leq \Gamma$ abelsch mit endlichem Index, dann folgt dass G endl. erzeugt ist und damit

$$G \cong \mathbb{Z}^n \times \prod \mathbb{Z}/p_i^{\nu_i}\mathbb{Z}$$

nun gilt auch $\mathbb{Z}^n \sim G \sim \Gamma$. Ein analoges Argument zeigt $\mathbb{Z}^m \sim \Gamma'$ und damit $n = m$ und es folgt $\Gamma \approx \Gamma'$.

(4) Dies bleibt wahr, wenn nur eine der beiden virtuell abelsch ist. Das heisst jede endlich. erzeugte Gruppe quasiisometrisch zu einer virtuell abelschen Gruppe (endl. erz.) ist selbst virtuell abelsch.

(5) Beide Gruppen sind virtuell frei. Hier fehlt noch der Fall F_m, F_n für $m, n \geq 2$ siehe Kapitel 4 in [1].

(6) Auch hier kann für eine der beiden Gruppen die Voraussetzung fallen gelassen werden.

(7) Beispiele von Flächen mit Bezug zur Hyperbolischen Geometrie ([1] Kapitel 5).

Quasiisometrische Invarianten: Unter Quasiisometrien invariante Eigenschaften heißen auch **geometrisch**, z. B.:

(1) Endliche Darstellbarkeit: $\Gamma \sim \Gamma'$, dann ist Γ endl. darstellbar gdw. Γ' ist endl. darstellbar.

(2) **Wortproblem**: Sei Γ endlich darstellbar. Wörter über Γ sind Wörter über Elemente und deren Inverses. Das Wortproblem ist nun die Frage ob so ein Wort identisch dem neutralen Element der Gruppe Γ ist. Wenn es einen Algorithmus gibt, der dieses Entscheidungsproblem löst, so hat Γ ein 'lösbares Wortproblem'. Diese Eigenschaft ist geometrisch. Für endlich erzeugte Gruppen ist dies ein offenes Problem.

(3) Virtuelle Nilpotenz ist geometrisch.

Satzverzeichnis

Literatur

[1] Bowditch, Brian H.: *A course on geometric group theory.*