Handout zum Algebraseminarvortrag

Exakte Sequenzen und der Hom**-Funktor**

von Gerrit Gruben und Oliver Schulze

Definition 1 (Exakte Sequenzen).
Eine Sequenz von R-Moduln $\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$ heisst exakt in M_i, falls $\mathrm{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$. Sie heisst exakt, wenn sie exakt in allen M_i ist.

Wir machen folgende Beobachtungen:

1. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ exakt $\Leftrightarrow$ f injektiv.
2. $N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ exakt $\Leftrightarrow$ g surjektiv.
3. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ exakt $\Leftrightarrow$ f injektiv, g surjektiv und $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$.

Diese Sequenzen nennt man auch kurze Sequenzen. Haben wir eine lange exakte Sequenz $\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$ gegeben, dann können wir mit $N_i := \mathrm{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ für $i \in \mathbb{N}$ auch schreiben:

$$0 \longrightarrow N_i \xrightarrow{\iota} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} N_{i+1} \longrightarrow 0$$

Sei f ein Modulhomomorphismus von M nach N, dann induziert dieser exakte Sequenzen:

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{f} \mathrm{im}(f) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}\, f \xrightarrow{\iota} N \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(f) \longrightarrow 0$$

mit $\mathrm{coker}\, f := N / \mathrm{im}\, f$.

Satz 1 (Exakte Sequenzen setzen noethersche Moduln zusammen.).
Ist $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenzen, dann ist M genau dann noethersch, wenn M' und M'' noethersch sind.

Definition 2 (Spaltende Sequenz).
Eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

spaltet, wenn $\mathrm{im}\, f$ ein direkter Summand von N ist, also $\exists N_1$: mit

$$N = \mathrm{im}\, f \oplus N_1$$

Satz 2 (Spaltende Sequenzen spalten Strukturen).
Spaltet eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

dann gilt

$$N \cong M \oplus P.$$

Satz 3 (Spaltkriterien für exakte Sequenzen).
Sei $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz. Dann sind äquivalent

(a) Folge spaltet auf.

(b) Es gibt einen Modulhomomorphismus $h : N \to M$ mit $h \circ f = \mathrm{Id}_M$.

(c) Es gibt einen Modulhomomorphismus $k : P \to N$ mit $g \circ k = \mathrm{Id}_P$.

Satz 4 (Fünferlemma).
Betrachten wir das folgende Diagramm. Mit M_i, N_i R-Moduln, f_i Homomorphismen. Alles kommutiert und die Zeilen sind exakte Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "u_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "v_1"] & N_2 \arrow[r, "v_2"] & N_3 \arrow[r, "v_3"] & N_4 \arrow[r, "v_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

1. Ist f_1 surjektiv und sind f_2, f_4 injektiv, dann ist f_3 injektiv.
2. Ist f_5 injektiv und sind f_2, f_4 surjektiv, dann ist f_3 surjektiv.

Insbesondere ist f_3 ein Isomorphismus, wenn die anderen f_i Isomorphismen sind.

Satz 5 (Schlangenlemma).
Es gilt für M, M', M'', N, N', N'' R-Moduln und f, f', f'' Modulnhomomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & N \arrow[r, "v'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

wobei die Zeilen exakt sind. Dann erhalten wir eine exakte Sequenz der Form

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \ker f' \arrow[r, "\overline{u}"] & \ker f \arrow[r, "\overline{v}"] & \ker f'' \arrow[dllll, "d"'] \\
\operatorname{coker} f' \arrow[r, "\overline{u}'"'] & \operatorname{coker} f \arrow[r, "\overline{v}'"'] & \operatorname{coker} f' \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Wobei $\overline{u}, \overline{v}$ Restriktionen von u und v sind und $\overline{v}', \overline{u}'$ von u', v' induzierte Abbildungen sind.

Definition 3 (Kategorie).
Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus folgenden Daten:

- Eine Klasse[1] von Objekten $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.
- Für alle $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ eine Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ von Morphismen (Pfeile). Für $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ schreiben wir auch $f : A \to B$ und es ist $\mathrm{dom}\, f = A$ und $\mathrm{codom}\, f = B$.
- Für alle $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ eine Kompositionsabbildung

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C),\ (f,g) \mapsto g \circ f$$

Sodass folgendes gilt:

(C1) Die Kompositionsabbildung ist immer assoziativ.

(C2) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',B') \neq \emptyset \Rightarrow (A,B) = (A',B')$ für Objekte A, A', B, B'.

(C3) Für alle Objekte $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ haben wir ein $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$. Sodass $\mathrm{Id}_A \circ \varphi = \varphi$ mit $\mathrm{codom}\, \phi = A$ und $\varphi \circ \mathrm{Id}_A = \varphi$ wenn $\mathrm{dom}\, \varphi = A$ ist. Wobei φ ein Pfeil ist.

Diese Definition ist etwas abstrakt, daher einige Beispiele:
Die Kategorie der Mengen **Set**: Hier sind die Objekte Mengen, die Morphismen Abbildungen und die übliche Komposition wird verwendet. Genauso bilden algebraische Strukturen (Gruppe,Ringe,Körper) als Objekte zusammen mit ihren Homomorphismen als Pfeile Kategorien, darunter fällt auch die für uns wichtige Kategorie der R-Moduln, genannt **R-Mod**. Analog kann man dies mit Metrischen/Topologischen Räumen und stetigen Abbildungen tun.
Im folgendem sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie.

Definition 4 (kovarianter Funktor).
Für Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ heisst $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovarianter Funktor, welcher durch folgende Daten gegeben ist:

1. Eine Zuordnung $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, $A \mapsto FA$ der Objekte der Kategorien.
2. Eine Zuordnung $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ von Pfeilen mit $A, B \in \mathrm{Obj}(C)$. Welche folgende Eigenschaften Erfüllt:
$$F(fg) = Fg \circ Ff \tag{1}$$
und
$$F\,\mathrm{Id}_A = \mathrm{Id}_{FA} \quad (\forall A \in \mathrm{Obj}(A)) \tag{2}$$

Beispiel: Von R-Moduln zu $\mathrm{Quot}(R)$-Vektorräumen (Austausch des zugrundeliegenden Integritätsbereich). Allgemeiner: Lokalisierung von R-Moduln zu $R[U^{-1}]$-Moduln für multiplikativ abgeschlossene Mengen U (Komplemente von Primidealen sind multiplikativ abgeschlossen per Definition). Der Vergissfunktor: Er vergisst die Struktur und bildet in **Set** ab.

Definition 5 (exakte Funktoren).
Sei F ein Funktor auf R-Mod.
linksexakt, wenn die exakte Sequenz $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ nach Anwendung von F exakt bleibt.
rechtsexakt, wenn die exakte Sequenz $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ nach Anwendung von F exakt bleibt.
exakt, wenn die exakte Sequenz $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ nach Anwendung von F exakt bleibt, d.h. wenn er rechts- und linksexakt ist.

[1] Man sollte sich an diesen Begriff nicht stören, aber realisieren dass hier keine Menge vorliegt.

Im folgendem betrachten wir die Kategorie $\mathcal{C}$ der R-Moduln mit den R-Modulhomomorphismen. Und setzen als Funktor in dieser Kategorie $\mathrm{Hom}_R(M, -)$.

Satz 6 (kovarianter Hom-Funktor).
$F := \mathrm{Hom}_R(M, -)$ ist ein kovarianter Funktor.

Satz 7 (Hom($M, -$) ist linksexakt).
Ist $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$ exakt, dann ist $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N_3)$ exakt. Das heisst $\mathrm{Hom}(M, -)$ ist linksexakt.

Definition 6 (Projektive Moduln).
Ein Modul P heisst projektiv, wenn für alle $\alpha : M \twoheadrightarrow N$, $\beta : P \to N$ Modulhomomorphismen eine Abbildung $\gamma : P \to M$ existiert, sodass $\beta = \alpha\gamma$, also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "\alpha"] & N \end{tikzcd}$$

Satz 8 (Charakterisierungssatz projektiver Moduln).
Sei P ein R-Modul, folgende Aussagen sind dann äquivalent:

a) P ist projektiv.

b) Für jeden Epimorphismus $\alpha : M \twoheadrightarrow N$ ist die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}(P, -)\alpha : \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, N)$ surjektiv. D. h. $\mathrm{Hom}(P, -)$ ist rechtsexakt.

c) Für ein Epimorphismus $\beta : F \twoheadrightarrow P$ und freiem Modul F, ist die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}(P, -)\beta$ surjektiv.

d) P ist ein direkter Summand eines freien Moduls.

e) Jeder Epimorphismus $\alpha : M \twoheadrightarrow P$ spaltet, d. h. es gibt ein $\beta : P \to M$, sodass $\alpha\beta = \mathrm{Id}_P$.

Korollar 1.
Exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

spalten genau dann wenn P projektiv ist und das genau dann wenn $\mathrm{Hom}(P, -)$ exakt ist.

Satz 9 (Freie vs projektive Moduln).
Freie Moduln sind immer projektiv. Projektive Moduln über lokale oder Hauptidealringe sind frei.

Bemerkung: Man kann auch den kontravarianten Funktor $F := \mathrm{Hom}(-, N)$ betrachten. Dieser ist immer linksexakt und exakt gdw. N ein sogenannter injektiver Modul ist. Dies ist der duale Begriff zur Projektivität.