4 Extremale Graphentheorie

4.1 Verbotene Untergraphen

Def. Für einen Graphen F bezeichne $\mathrm{ex}(n,F)$ die maximale Anzahl von Kanten eines Graphen mit n Ecken, der F nicht enthält. $\mathrm{EX}(n,F)$ ist die Menge der Graphen G mit $|G| = n$, $F \not\subseteq G$ und $\|G\| =: \mathrm{ex}(n,F)$.

Satz: Sei $g, \delta \geq 3$, dann hat jeder Graph G mit $\delta(G) = \delta$ und Taillenweite $g(G) = g$ mindestens

$$n_0(g,\delta) = \begin{cases} 1 + \frac{\delta}{\delta-2}\left[(\delta-1)^{(g-1)/2} - 1\right], & g \text{ ungerade} \\ \frac{2}{\delta-2}\left[(\delta-1)^{g/2}\right] - 1, & g \text{ gerade} \end{cases}$$

Ecken.

Satz (von Pósa): Sei G zsh. mit $n \geq 3$ Ecken und für je zwei nicht benachbarte Ecken $x, y \in V$ gelte $d(x) + d(y) \geq k$, dann gilt: Ist $k = n$, so ist G hamiltonisch. Ist $k < n$, dann enthält G einen Weg der Länge k und einen Kreis der Länge $\geq \frac{k+2}{2}$.

Def. Ein Turán-Graph $T_r(n)$ ist ein vollständiger r-partiter Graph der Ordnung n, dessen Partitionsklassen sich in ihrer Größe so wenig wie möglich unterscheiden.

Lemma: $T_r(n)$ ist der eindeutig bestimmte r-partite Graph der Ordnung n mit maximaler Größe. Damit können wir $t_r(n) := \|T_r(n)\|$ wohldefinieren.

Satz (von Turán): Für $r, n \geq 2$ gilt:

$$\mathrm{EX}(n, K_{r+1}) = \{T_r(n)\}$$

und damit $\mathrm{ex}(n, K_{r+1}) = t_r(n)$.

Def. Bezeichne mit $z(m,n;s,t)$ die maximale Anzahl der Kanten eines bipartiten Graphen $G \subseteq K_{m,n}$, der keinen bipartiten Graphen $F \subseteq K_{s,t}$ enthält.

Lemma: Seien $m,n,s,t,k,r \in \mathbb{N}_0$, $(2,2) \leq (s,t) \leq (m,n)$, $0 \leq r < m$ und $G \subseteq K_{m,n}$ ein bipartiter Graph der Größe $z = my = km + r$, der keinen $K_{s,t}$ enthält. Dann gilt:

$$m\binom{y}{t} \leq (m-r)\binom{k}{t} + r\binom{k+1}{t} \leq (s-1)\binom{n}{t}$$

Satz: Für alle natürlichen m,n,s,t gilt

$$z(m,n;s,t) \leq (s-1)^{1/t}(n-t+1)m^{1-1/t} + (t-1)m$$

Satz: Für $n \geq 1$ gilt

$$\mathrm{ex}(n, K_{2,2}) \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$$

4.2 Ramsey Theorie

Satz (von Ramsey - 1930): Für alle $k, l \in \mathbb{N}^+$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass jeder Graph mit $n \geq n_0$ Ecken einen K_k oder $\bar{K_l}$ enthält.

Def. Das kleinste n_0, das obige Forderung erfüllt, heisst Ramsey-Zahl $r(k, l)$.

Satz (Erdös und Szekeres - 1935): Für alle $k, l \geq 2$ gilt

$$r(k, l) \leq r(k, -1) + r(k-1, l)$$

Satz (von Schur): Färbt man die natürlichen Zahlen mit endlich vielen Farben, so enthält mindestens eine Farbklasse drei Zahlen x, y, z mit $x + y = z$.

Def. Die (Graphen-)Ramsey-Zahl $R(G_1, \ldots, G_k)$ ist die kleinste natürliche Zahl, sodass jede k-Kantenfärbung eines Graphen mit $\geq R(G_1, \ldots, G_k)$ Ecken einen Graphen G_i mit Farbe i für ein i liefert. $R(G, G)$ heißt Ramsey-Zahl von G.

Satz (Chvátal - 1977): Für jeden Baum T mit n Ecken gilt:

$$R(T, K_s) = (n-1)(s-1) + 1$$

Ungelöstes Problem: These von Burr und Erdös 1976

$$R(T, T) \leq 2n - 2$$

4.3 Das Regularitätslemma

Def. Es ist

$$d(A, B) := \frac{\|A, B\|}{|A||B|} \in [0, 1]$$

die Dichte des Eckenpaares (A, B). Wobei wir mit $\|A, B\| = \|G[A, B]\|$ die Anzahl der A-B-Kanten in G bezeichnen.

Def. Für ein $\epsilon > 0$ heisst (A, B) ϵ-regulär, wenn für alle $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ mit $(|A'|, |B'|) \geq \epsilon(|A|, |B|)$ gilt:

$$|d(A, B) - d(A', B')| \leq \epsilon$$

Eine Partition $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ von V mit Ausnahmemenge V_0 heißt ϵ-reguläre Partition, wenn gilt

i) $|V_0| \leq \epsilon |V|$.

ii) $|V_i| = |V_j|$ für $i, j \in [k]$.

iii) Maximal ϵk^2 Paare $(V_i, V_j)_{1 \leq i < j \leq k}$ sind nicht ϵ-regulär.

Satz: Sei für ein $\epsilon > 0$ (A, B) ϵ-regulär und $d := d(A, B)$. Dann gilt für alle $B' \subseteq B$ mit $|B'| \geq \epsilon |B|$, dass die Menge

$$A' := \{v \in A \mid |N(v) \cap B'| < (d - \epsilon)|B'|\}$$

weniger als $\epsilon|A|$ Elemente enthält. Das heisst mehr als $\epsilon|A|$ viele Elemente aus A haben mehr als $(d - \epsilon)|B'|$ viele Nachbarn in B'.

Satz (Slicing Lemma): Sei (A, B) ein ϵ-reguläres Paar, $d := d(A, B)$. Für $\alpha > \epsilon$, seien $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ mit $|A'| \geq \alpha|A|$ und $|B'| \geq \alpha|B|$. Dann ist (A', B') ein ϵ'-reguläres Paar mit $e' := \max\{\epsilon/\alpha, 2\epsilon\}$.

Lemma (Regularitätslemma von Szemerédi - 1976): Für alle $\epsilon > 0$ und $m \geq 1$ existiert ein M und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass sich alle Eckenmengen der Graphen mit $n \geq N$ Ecken in die ϵ-reguläre Partition $\{V_0, \ldots, V_k\}$ partitionieren lassen. Dabei ist k aus $[m, M]$.

Satz (Szemerédi - 1975): Für alle natürlichen $k \geq 3$ und $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle natürlichen $n \geq n_0$ gilt: Wenn $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|A| > \epsilon n$, dann enthält A eine arithmetische Progression der Länge k.

Def. Zu gegebenem $\epsilon > 0$, $d \in [0, 1], m \in \mathbb{N}$ und $V_1, \ldots, V_k$ Partition einer Eckenmenge V mit $|V_i| = m$ konstruieren wir den Graphen R mit Eckenmenge $V_1, \ldots, V_k$ und Kanten zwischen V_i und V_j genau dann wenn (V_i, V_j) ein ϵ-reguläres Paar mit Dichte $\geq d$ ist. R heißt Regularitätsgraph (Cluster/Reduced Graph). Für ein $s \in \mathbb{N}$ entsteht R_s aus R in dem die Ecken durch s Ecken ersetzt werden und vormals verbundene Ecken nach dieser Transformation vollständige bipartite Graphen $K_{s,s}$ werden.

Lemma (Einbettungslemma): $\forall d \in (0, 1]$ und $\Delta \geq 1$ existiert ein $\epsilon_0 > 0$, sodass für einfache Graphen G und H mit $\Delta(H) \leq \Delta$ gilt: Für den Regularitätsgraphen R von G mit den Parametern $\epsilon \leq \epsilon_0$, m und d, sowie $s \in \mathbb{N} : m \geq \frac{2s}{d^\Delta}$, dann folgt aus $H \subseteq R_s$ dass H Teilgraph von G ist.

Satz (von Erdös & Stone - 1946): Zu jedem $r \geq 2$, $s \geq 1$ und $\epsilon > 0$ mit $r, s \in \mathbb{N}$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass alle Graphen mit $n \geq n_0$ Ecken und $\geq t_{r-1}(n) + \epsilon n^2$ Kanten einen K_r^s.

Korollar: Für alle Graphen H mit mindestens einer Kante gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{ex}(n, H) \binom{n}{2}^{-1} \right) = \frac{\chi(H) - 2}{\chi(H) - 1}$$

Lemma: Der Turángraph $T^{r-1}(n)$ hat größenordnungmäßig n^2 Kanten, denn für alle n und r gilt:

$$t_{r-1}(n) \leq \frac{n^2}{2} \frac{r-2}{r-1}$$

Gleichheit gilt, wenn n ein Vielfaches von $r - 1$ ist.

Lemma: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(t_{r-1}(n) \binom{n}{2}^{-1} \right) = \frac{r-2}{r-1}$$

Satz (Chvátal, Rödl, Szemerédi und Trotter - 1983): Für jeden Graph G mit Maximalgrad Δ gilt:

$$r(G, G) \leq c(\Delta) \cdot n$$

4.4 Hamiltonsche Graphen

Satz: Sei G ein hamiltonischer Graph, dann gilt:

$$\forall \emptyset \neq S \subseteq V : c(G \setminus S) \leq |S|$$

Für $c(G \setminus S) = |S|$, ist jede der Komponenten von $G \setminus S$ ein Hamiltonweg.

Def. Ein Graph G ist t-robust, falls $t \cdot c(G \setminus S) \leq |S| \quad (\forall \emptyset \neq S \subset V)$.

Def. Die Robustheit von G ist das maximale t, sodass G ist t-robust.

Def. Ein Graph G heisst hyperhamiltonisch, falls der Graph nicht hamiltonisch ist, aber für alle $v \in V$ ist $G - v$ hypohamiltonisch.

Der Petersen-Graph ist hyperhamiltonisch und es existiert kein kleinerer hyperhamiltonischer Graph als der Petersen-Graph.

Satz (Dirac - 1952): Sei G einfach mit $n \geq 3$, $\delta = \delta(G)$ Für $\delta \geq \frac{n}{2} \quad \Rightarrow G$ hamiltonisch.

Korollar: K_n mit $n \geq 3$ ist hamiltonisch.

Lemma (Ore - 1960): Sei G ein einfacher Graph und $uv \notin E(G)$ mit $d(u) + d(v) \geq n$. Dann ist G hamiltonisch gdw. $G + uv$ ist hamiltonisch.

Def. Sei G ein Graph. Seinen (hamiltonischen) Abschluss $C(G)$ erhält man durch hinzufügen von Kanten uv zwischen nicht benachbarten Ecken u und v mit $d(u) + d(v) \geq n$. Man fügt solange Kanten hinzu, bis es keine Eckenpaare mehr gibt, die diese Bedingung erfüllen.

Satz (Bondy-Chvátal 1976): Sei G einfach. G ist hamiltonisch $\Leftrightarrow$ der Abschluss von G ist hamiltonisch.

Korollar: Sei G einfach $n \geq 3$. Der Abschluss von G ist vollständig, dann ist G hamiltonisch.

Satz (Chvátal - 1972): Sei G einfach mit Gradfolge $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Wenn aus $i < \frac{n}{2}$ folgt ($d_i > i$ oder $d_{n-i} \geq n - i$), dann ist G hamiltonisch.

Satz (Chvátal-Erdős - 1972): Sei G ein Graph mit $n \geq 3$ Ecken und $\kappa(G) \geq \lambda(G)$, dann ist G hamiltonisch.

Aufgaben

1. Zeige $r(p, 2) = r(2, p)$ für $p \in \mathbb{N}$.

2. Beim Bridge spielen immer zwei Teams mit je 2 Spielern gemeinsam eine Partie.
   In einem Bridge-Club gibt es nun folgende Regel: Vier Spieler dürfen nur dann zusammen eine Partie spielen, wenn keine zwei von ihnen zuvor in einem Team gewesen sind.
   Bei einem Treffen dieses Bridge-Clubs kommen nun 14 Mitglieder zusammen, von denen jeder bei einem vorigen Treffen bereits mit genau fünf anderen Spielern in einem Team gewesen ist. Nach dem drei Partien gespielt sind, kann auf Grund der Regel zunächst keine weitere Partie stattfinden. Nun kommt jedoch ein 15-ter Spieler hinzu, mit dem zuvor keiner der Anwesenden in einem Team gewesen ist.
   Zeigen Sie, dass nun mindestens eine weitere Partie gespielt werden kann.

3. a) Sei G ein Graph mit Eckenmenge V, der keinen K_{r+1} enthält. Zeige: Es einen r-partiten Graphen H mit Eckenmenge V, so dass für jede Ecke $z \in V$ gilt:
   $$d_G(z) \leq d_H(z)$$
   b) Folgere hieraus den Satz von Turan.
   Hinweis: Induktion über r.

Literatur

[1] Bollobás, Béla: *Graduate Texts in Mathematics.* Bd. 184: *Modern graph theory*. Berlin-Heidelberg-New York-Barcelona-Budapest-Hong Kong-London-Mailand-Paris-Santa Clara-Singapur-Tokyo : Springer-Verlag, 1998. – xiii, 394 S.

[2] Bondy, A. ; Murty, U.S.R.: *Graph Theory.* Springer, 2008 (Graduate Texts in Mathematics)

[3] Diestel, R.: *Graph Theory.* Springer, 2006 (Graduate Texts in Mathematics)

[4] Komlós, János ; Simonovits, Miklós: *Szemerédi's Regularity Lemma and Its Applications in Graph Theory.* 1996

[5] West, Douglas B.: *Introduction to Graph Theory (2nd Edition).* Prentice Hall, 2000

Anhang

Bekannte Ramsey-Zahlen

$R(p,q)$	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	26				