Exakte Sequenzen und der Hom-Funktor

Gerrit Gruben
Oliver Schulze
Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematik

17. Mai 2010

I Exakte Sequenzen

Definition 1 (Exakte Sequenzen).
Eine Sequenz von R-Moduln $\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$ heisst exakt in M_i, falls $\mathrm{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$. Sie heisst exakt, wenn sie exakt in allen M_i ist.

Wir machen folgende Beobachtungen:

1. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ exakt $\Leftrightarrow$ f injektiv.
2. $N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ exakt $\Leftrightarrow$ g surjektiv.
3. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ exakt $\Leftrightarrow$ f injektiv, g surjektiv und $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$.

Diese Sequenzen nennt man auch kurze Sequenzen. Haben wir eine lange exakte Sequenz $\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$ gegeben, dann können wir mit $N_i := \mathrm{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ für $i \in \mathbb{N}$ auch schreiben:

$$0 \longrightarrow N_i \xrightarrow{\iota} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} N_{i+1} \longrightarrow 0$$

Ein kleines Beispiel mit dem Ring der ganzen Zahlen:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/5\,\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

mit $f : x \mapsto 5x$, $g : y \mapsto \overline{y}$. Diese Sequenz ist exakt.
Sei f ein Modulhomomorphismus von M nach N, dann induziert dieser exakte Sequenzen:

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{f} \mathrm{im}(f) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}\, f \xrightarrow{\iota} N \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(f) \longrightarrow 0$$

mit $\mathrm{coker}\, f := N/\mathrm{im}\, f$.
Beispiel: Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \mapsto 4a$, dann ist $\mathrm{im}(f) = 4\,\mathbb{Z}$ und $\ker(f) = 0$. Und die induzierten Sequenzen sind:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 4\,\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow 4\,\mathbb{Z} \longrightarrow 2\,\mathbb{Z} \longrightarrow {}^{2\,\mathbb{Z}}\!\big/_{4\,\mathbb{Z}} \left(\cong {}^{\mathbb{Z}}\!\big/_{2\,\mathbb{Z}}\right) \longrightarrow 0$$

Satz 1 (Exakte Sequenzen setzen noethersche Moduln zusammen.).
Ist $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenzen, dann ist M genau dann noethersch, wenn M' und M'' noethersch sind.

Beweis
Siehe Vorlesung. ∎

Beispiel

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{a \mapsto (a,0)} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{(x,y) \mapsto y} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Weil $\mathbb{Z}$ noethersches $\mathbb{Z}$-Modul $\Rightarrow$ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ noethersches $\mathbb{Z}$ Modul.

Definition 2 (Spaltende Sequenz).
Eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

spaltet, wenn $\operatorname{im} f$ ein direkter Summand von N ist, also $\exists N_1$: mit

$$N = \operatorname{im} f \oplus N_1$$

Satz 2 (Spaltende Sequenzen spalten Strukturen).
Spaltet eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

dann gilt

$$N \cong M \oplus P.$$

Beweis
Per Definition gilt $N \cong N_1 \oplus \operatorname{im} f$. Da f injektiv ist, folgt $M \cong \operatorname{im}(f)$, also $N \cong N_1 \oplus M$.
Nun gilt $N_1 \cong {}^{N}\!\big/_{\operatorname{im} f}$, $\operatorname{im} f = \ker g$ und damit wegen des Homomorphiesatzes und der Surjektivität von g:

$$N_1 \cong {}^{N}\!\big/_{\ker g} \cong \operatorname{im}(g) = P$$

∎

Beispiel:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{f:a\mapsto 3a} \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \xrightarrow{g:b\mapsto 4b} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Es ist

$$\operatorname{im} f = 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \ker g$$

Chinesischer Restsatz: $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{im} f$ ist ein direkter Summand von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Satz 3 (Spaltkriterien für exakte Sequenzen).
Sei $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz. Dann sind äquivalent

(a) Folge spaltet auf.

(b) Es gibt einen Modulhomomorphismus $h : N \to M$ mit $h \circ f = \mathrm{Id}_M$.

(c) Es gibt einen Modulhomomorphismus $k : P \to N$ mit $g \circ k = \mathrm{Id}_P$.

Beweis
Bild zum Beweis:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, shift left, "f"] & N \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[r, shift left, "g"] & P \arrow[l, shift left, "k"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$(a) \Rightarrow (b)$: $N = \operatorname{im} f \oplus N_!$ $\Rightarrow$ Es gibt einen Modulhomomorphismus $\pi : N \to imf$ mit $\pi|_{\operatorname{im} f} = \mathrm{Id}_{\operatorname{im} f}$.
Definiere $h : N \to M$ durch $h := \phi \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "h"'] & \operatorname{im} F \arrow[d, "\phi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Dann gilt für alle $m \in M$:

$$h(f(m)) = \phi(\pi(f(m)))) = \phi(f(m)) = m$$

$(b) \Rightarrow (c)$: Definiere $k : P \to N$ durch: Zu $p \in P$ wähle n mit $g(n) = p$ (g surjektiv). Setze $k(p) := n - f(h(n))$.
Das ist wohldefiniert: n_1, n_2 so dass $g(n_1) = p = g(n_2)$. Dann ist $g(n_1 - n_2) = 0$, also $n := n_1 - n_2 \in \ker g = \operatorname{im} f$, also $n = f(m)$ für ein $m \in M$. Dann ist $n - f(h(n)) = f(m) - f(h(f(m)))) = f(m) - f(m) = 0$. Also

$n_1 - f(h(n_1)) = n_2 - f(h(n_2))$.
Modulhomomorphismus: Nachrechnen.
Bleibt zu zeigen: $g \circ k = \mathrm{Id}_P$: Für alle $p \in P$ gilt:

$$g(k(p)) = g(n - f(h(n))) = g(n) - g(f(h(n)))) = g(n) = p$$

$(c) \Rightarrow (a)$: Es sei $g \circ k = \mathrm{Id}_P$. Dann ist $N = \ker g + \operatorname{im} k$, denn $n = (n - k(g(n))) + k(g(n))$ und $g(n - k(g(n))) = g(n) - g(k(g(n)))) = g(n) - g(n) = 0$. Außerdem $\ker g \cap \operatorname{im} k = \{0\}$, denn $g(n) = 0$ und $n = k(p) \Rightarrow g(k(p)) = 0 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow n = 0$. Daher $N = \ker g \oplus \operatorname{im} K$. ∎

Beispiel: Die folgende exakte Sequenz spaltet nicht:

$$0 \longrightarrow 2\,\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Angenommen Sie spaltet, dann existiert ein $h : \mathbb{Z} \to 2\,\mathbb{Z}$ mit $h \circ f = \mathrm{Id}_{2\,\mathbb{Z}}$. h muss von der Form $h(x) = 2mx$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$ sein. Also

$$h(f(x)) = h(x) = 2mx = x \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

und das ist ein Widerspruch. Damit spaltet diese Sequenz nicht.

Satz 4 (Fünferlemma).
Betrachten wir das folgende Diagramm. Mit M_i, N_i R-Moduln, f_i Homomorphismen. Alles kommutiert und die Zeilen sind exakte Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "u_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "v_1"] & N_2 \arrow[r, "v_2"] & N_3 \arrow[r, "v_3"] & N_4 \arrow[r, "v_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

1. Ist f_1 surjektiv und sind f_2, f_4 injektiv, dann ist f_3 injektiv.
2. Ist f_5 injektiv und sind f_2, f_4 surjektiv, dann ist f_3 surjektiv.

Insbesondere ist f_3 ein Isomorphismus, wenn die anderen f_i Isomorphismen sind.

Beweis
Am besten schaut man sich das Diagramm während der Beweisführung an:
1. Wir zeigen für $m_3 \in M_3$ mit $f_3(m_3) = 0 \Rightarrow m_3 = 0$.
Es gilt
$$0 = v_3(f_3(m_3)) = f_4(u_3(m_3))$$
also $u_3(m_3) \in \ker f_4$ und da f_4 injektiv gilt $u_3(m_3) = 0$. Damit ist $m_3 \in \ker u_3 = \operatorname{im} u_2$, damit existiert ein $m_2 \in M_2 : u_2(m_2) = m_3$. Und
$$0 = f_3(u_2(m_2)) = v_2(f_2(m_2)) \Rightarrow f_2(m_2) \in \ker v_2 = \operatorname{im} v_1$$
womit ein $n_1 \in N_1$ existiert mit $v_1(n_1) = f_2(m_2)$. Nun ist f_1 surjektiv und damit existiert ein $m_1 \in M_1$ mit $f_1(m_1) = n_1$. Es gilt nun da f_2 injektiv ist:
$$u_1(m_1) = f_2^{-1}(v_1(f_1(m_1))) = f_2^{-1}(f_2(m_2)) = m_2$$
und damit
$$u_2(u_1(m_1)) = m_3 = 0$$
weil $\operatorname{im} u_1 = \ker u_2$. Damit ist $m_3 = 0$ und $\ker f_3 = \{0\}$, also ist f_3 injektiv.
2. Wir müssen zeigen, dass f_3 surjektiv ist.
Sei $n_3 \in N_3$. Setze $n_4 = v_3(n_3)$. Weil f_4 surjektiv ist, existiert ein $m_4 \in M_4$ mit $f_4(m_4) = n_4$ und da $n_4 \in \operatorname{im} v_3 = \ker v_4$ ist, folgt
$$0 = v_4(n_4) = v_4(f_4(m_4)) = f_5(u_4(m_4))$$
also $u_4(m_4) \in \ker f_5$ und damit $u_4(m_4) = 0$. Damit ist $m_4 \in \ker u_4 = \operatorname{im} u_3$ und es existiert ein $m_3 \in M_3$ mit $u_3(m_3) = m_4$.
Da das Diagramm kommutiert gilt:
$$v_3(n_3) = f_4(u_3(m_3)) = v_3(f_3(m_3))$$
und über die Linearität $n_3 - f_3(m_3) \in \ker v_3 = \operatorname{im} v_2$.
Damit existiert ein $\hat{n}_2 \in N_2 : v_2(\hat{n}_2) = n_3 - f_3(m_3)$. Da f_2 surjektiv $\exists \hat{m}_2 \in M_2 : f_2(\hat{m}_2) = \hat{n}_2$. Jetzt gilt aber wegen der Kommutativität, dass
$$f_3(u_2(\hat{m}_2)) = v_2(\hat{n}_2) = n_3 - f_3(m_3) \Leftrightarrow n_3 = f_3(u_2(\hat{m}_2) - m_3)$$
also $n_3 \in \operatorname{im} f_3$, aber das ist gerade die Surjektivität. ∎

Satz 5 (Schlangenlemma).
Es gilt für M, M', M'', N, N', N'' R-Moduln und f, f', f'' Modulnhomomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & N \arrow[r, "v'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

wobei die Zeilen exakt sind. Dann erhalten wir eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \ker f' \xrightarrow{\overline{u}} \ker f \xrightarrow{\overline{v}} \ker f'' \xrightarrow{d} \operatorname{coker} f' \xrightarrow{\overline{u}'} \operatorname{coker} f \xrightarrow{\overline{v}'} \operatorname{coker} f' \longrightarrow 0$$

Wobei $\overline{u}, \overline{v}$ Restriktionen von u und v sind und $\overline{v}', \overline{u}'$ von u', v' induzierte Abbildungen sind.

Beweis
Der Beweis besteht aus vielen kleinen Teilen, am wichtigsten ist es dieses Diagramm vor sich liegen zu haben:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker f' \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[d] & \ker f \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d] & \ker f'' \arrow[r, "d"] \arrow[d] & {} \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & N \arrow[r, "v'"] & N'' \arrow[r] & 0 \\
{} \arrow[r, "d"] & \operatorname{coker} f' \arrow[r, "\overline{u}'"] \arrow[u] & \operatorname{coker} f \arrow[r, "\overline{v}'"] \arrow[u] & \operatorname{coker} f'' \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Zuerst konstruieren wir $d : \ker f'' \to \operatorname{coker} f'$.
Wähle $x'' \in \ker f'' \subseteq M''$. Dann existiert wegen der Surjektivität von v ein $x \in M$ mit $v(x) = x''$. Jetzt gilt aber für dieses x

$$0 = f''(x'') = f''(v(x)) = v'(f(x))$$

womit $f(x) \in \ker v' = \operatorname{im} u'$ ist. Also existiert ein $y' \in N'$, sodass $u'(y) = f(x)$. Setze nun $d(x'') := y' + \operatorname{im} f' \in N'/\operatorname{im} f' = \operatorname{coker} f'$. Anders geschrieben: $d = \overline{u'^{-1} \circ f \circ v^{-1}}$.

Wir müssen noch zeigen, dass d wohldefiniert ist. Dazu erkennt man als kritische Stelle die Uneindeutigkeit des gewählten $x \in M$. Denn es kommen alle $x + \ker v = x + \operatorname{im} u$ in Frage. Also sei $x \in \operatorname{im} u$. Dann existiert ein $x' \in M'$ mit $u(x') = x$ und es ist $\operatorname{im} f' \ni f'(x') = u^{-1}(f(u(x'))) = u'^{-1}(f(x))$ eindeutig, da u' injektiv. Damit ist aber auch das Bild eindeutig in $\operatorname{coker} f' = {}^{N'}\!/_{\operatorname{im} f'}$.

Nun zeigen wir, dass d ein Homomorphismus ist. Seien dazu $x_1'', x_2'' \in M''$, dann existeren $x_1, x_2, \hat{x}$ mit $v(x_i) = x_i''$ und $v(\hat{x}) = x_1'' + x_2''$. Dann gilt zum einen

$$d(\hat{x}) = v'^{-1}(f''(v(\hat{x})))) + \operatorname{im} f'$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} d(x_1) + d(x_2) =& v^{-1}(f''(x_1'')) + v^{-1}(f''(x_2'')) + \operatorname{im} f' \\ =& v^{-1}(f''(x_1'') + f''(x_2'')) + \operatorname{im} f' \\ =& v^{-1}(f''(x_1'' + x_2'')) + \operatorname{im} f' \end{aligned}$$

da v injektiv ist und v, f'' Homomorphismen. Man sieht, dass man auch ein $r \in \mathbb{R}$ an x_1 multiplizieren hätte können und dies nichts geändert hätte.
Jetzt zeigen wir, dass $\overline{u}$ und $\overline{v}$ wohldefiniert sind. Das ist für $\overline{u}$ erreicht, wenn aus $x' \in \ker f'$ folgt, dass $u(x') \in \ker f$, da wir dann u auf $\overline{u}$ wohldefiniert einschränken können. Also sei $x' \in \ker f'$, dann folgt:

$$0 = f'(x') = v^{-1}(f(u(x'))) \Rightarrow f(u(x')) = 0 \Rightarrow u(x') \in \ker f$$

Analog folgt für $x \in \ker f$

$$0 = v'(f(x)) = f''(v(x))$$

also $v(x) \in \ker f''$.
Jetzt ist die Wohldefiniertheit von $\overline{u}'$ und $\overline{v}'$ an der Reihe. Dabei setzen wir:

$$\overline{u}'(n' + \operatorname{im} f') := u(n') + \operatorname{im} f,\ \overline{v}'(n + \operatorname{im} f) := v'(n) + \operatorname{im} f'' \qquad \blacksquare$$

Sei nun $n_1' - n_2' \in \operatorname{im} f'$ es ist z. z. dass $u'(n_1 - n_2) \in \operatorname{im} f$. Es existiert ein $m' \in M' : f'(m') = n_1' - n_2'$ und nach der Kommutativität des Diagrammes gilt $u'(n_1 - n_2) = f(u(m')) \Rightarrow u' \operatorname{im} f$. Die Wohldefiniertheit von $\overline{v}'$ verläuft analog.
Nun müssen wir noch zeigen, dass diese Sequenz exakt ist. Das lassen wir vorerst aus.

II Kategorientheorie

Wir führen als erstes den Begriff einer Kategorie ein, welches den strukturellen Rahmen für dieses Kapitel definiert:

Definition 3 (Kategorie).
Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus folgenden Daten:

- Eine Klasse[1] von Objekten $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.
- Für alle $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ eine Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ von Morphismen (Pfeile). Für $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreiben wir auch $f : A \to B$ und es ist $\mathrm{dom}\, f = A$ und $\mathrm{codom}\, f = B$.
- Für alle $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ eine Kompositionsabbildung

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C),\ (f, g) \mapsto g \circ f$$

Sodass folgendes gilt:

(C1) Die Kompositionsabbildung ist immer assoziativ.

(C2) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B') \neq \emptyset \Rightarrow (A, B) = (A', B')$ für Objekte A, A', B, B'.

(C3) Für alle Objekte $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ haben wir ein $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$. Sodass $\mathrm{Id}_A \circ \varphi = \varphi$ mit $\mathrm{codom}\, \phi = A$ und $\varphi \circ \mathrm{Id}_A = \varphi$ wenn $\mathrm{dom}\, \varphi = A$ ist. Wobei φ ein Pfeil ist.

Diese Definition ist etwas abstrakt, daher einige Beispiele:
Die Kategorie der Mengen **Set**: Hier sind die Objekte Mengen, die Morphismen Abbildungen und die übliche Komposition wird verwendet. Genauso bilden algebraische Strukturen (Gruppe,Ringe,Körper) als Objekte zusammen mit ihren Homomorphismen als Pfeile Kategorien, darunter fällt auch die für uns wichtige Kategorie der R-Moduln, genannt **R-Mod**. Analog kann man dies mit Metrischen/Topologischen Räumen und stetigen Abbildungen tun.
Ein abstrakteres Beispiel: Wir haben ein Poset $(X, \leq)$ gegeben. Dann konstruieren wir daraus eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = X$ und $\mathrm{Mor}(a, b) \neq \emptyset$

[1] Man sollte sich an diesen Begriff nicht stören, aber realisieren dass hier keine Menge vorliegt.

genau dann wenn $a \leq b$ für alle $a, b \in X$[2]. Die Komposition ist aufgrund der Transitivität von $\leq$ möglich, die Identität existiert wegen der Reflexivität. Im folgendem sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie.

Definition 4 (Isomorphismen, Automorphismengruppe).
$f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ für $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ heißt Isomorphismus, wenn es ein g ($= f^{-1}$ genannt) aus $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ gibt, sodass $gf = \mathrm{Id}_A$ sowie $fg = \mathrm{Id}_B$ gilt. Es heisst

$$\mathrm{Aut}(A) = \{f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A) \mid f \text{ Isomorphismus } \} \quad (A \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}), \tag{1}$$

Automorphismengruppe.

Wir kommen nun zu den strukturerhaltenden 'Abbildungen' zwischen Kategorien:

Definition 5 (kovarianter Funktor).
Für Kategorien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ heisst $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovarianter Funktor, welcher durch folgende Daten gegeben ist:

1. Eine Zuordnung $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, $A \mapsto FA$ der Objekte der Kategorien.

2. Eine Zuordnung $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ von Pfeilen mit $A, B \in \mathrm{Obj}(C)$. Welche folgende Eigenschaften Erfüllt:

   $$F(fg) = Fg \circ Ff \tag{2}$$

   und

   $$F\,\mathrm{Id}_A = \mathrm{Id}_{FA} \quad (\forall A \in \mathrm{Obj}(A)) \tag{3}$$

Beispiel: Von R-Moduln zu $\mathrm{Quot}(R)$-Vektorräumen (Austausch des zugrundeliegenden Integritätsbereich). Allgemeiner: Lokalisierung von R-Moduln zu $R[U^{-1}]$-Moduln für multiplikativ abgeschlossene Mengen U (Komplemente von Primidealen sind multiplikativ abgeschlossen per Definition). Der Vergissfunktor: Er vergisst die Struktur und bildet in **Set** ab.

[2]Es sollen am besten entweder kein oder ein Pfeil in einer Morphismenge existieren.

Definition 6 (duale Kategorie, kontravarianter Funktor).
Wir nennen $\mathcal{C}^{op}$ die duale Kategorie von $\mathcal{C}$. Sie verfügt über die selben Objekte nur werden die Pfeile umgedreht. Das heisst $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$ für alle $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Ein kovarianter Funktor von C^{op} nach einer Kategorie $\mathcal{D}$ nennt man kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$.

Beide Konzepte lassen sich in Bilder fassen:

$$\mathcal{C}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{g} \mathcal{C}_3$$

Kovariant
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "Ff"'] \arrow[rr, bend left, "F(gf)=FgFf"] & \mathcal{C}_2 \arrow[r, "Fg"'] & \mathcal{C}_3 \end{tikzcd}$$

Kontravariant
$$\begin{tikzcd} F\mathcal{C}_1 & F\mathcal{C}_2 \arrow[l, "Ff"] & F\mathcal{C}_3 \arrow[l, "Fg"] \arrow[ll, bend right, "F(gf)=FfFg"'] \end{tikzcd}$$

In der Kategorie der K-Vektorräume kann man das dualisieren $V \mapsto V^*$ und $f \mapsto f^*$ als kontravarianten Funktor auffassen. Oder auch: Spec: Spektrum von Ringen betrachten und die von Spec induzierten stetigen Abbildungen.

III Hom-Funktor

Wir verknüpfen den Begriff der Funktoren mit den der spaltenden Sequenzen. Dabei betrachten wir nun die Kategorie der R-Moduln. Wir können diese Definitionen aber auch allgemeiner für abelsche Kategorien fassen:

Definition 7 (exakte Funktoren).
Sei F ein Funktor auf R-Mod.
linksexakt, wenn die exakte Sequenz $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ nach Anwendung von F exakt bleibt.
rechtsexakt, wenn die exakte Sequenz $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ nach Anwendung von F exakt bleibt.
exakt, wenn die exakte Sequenz $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ nach Anwendung von F exakt bleibt, d.h. wenn er rechts- und linksexakt ist.

Im folgendem betrachten wir die Kategorie $\mathcal{C}$ der R-Moduln mit den R-Modulhomomorphismen. Und setzen als Funktor in dieser Kategorie $\mathrm{Hom}_R(M, -)$.

Satz 6 (kovarianter Hom-Funktor).
$F := \mathrm{Hom}_R(M, -)$ ist ein kovarianter Funktor.

Beweis
Der Funktor ist so definiert, wie man es sich denkt. Moduln N wird $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ zugeordnet. Und für $f \in \mathrm{Mor}(N_1, N_2) = \mathrm{Hom}_R(N_1, N_2)$ wird $Ff : \mathrm{Hom}_R(M, N_1) \to \mathrm{Hom}_R(M, N_2), \phi \mapsto f\phi$. Jetzt haben wir zum einen:

$$F(\mathrm{Id}_N)(\phi) = \mathrm{Id}_N \circ \phi = \phi$$

für $\phi \in FN = \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Und zum anderen für $f : N_1 \to N_2$, $g : N_2 \to N_3$ sowie $\phi \in \mathrm{Hom}_R(N_1, N_3)$:

$$(Fg \circ Ff)(\phi) = (Fg)(f \circ \phi) = g \circ (f \circ \phi) = (g \circ f) \circ \phi = F(g \circ f)(\phi)$$

womit wir erstens $F(\mathrm{Id}_N) = \mathrm{Id}_{FN}$ und zweitens $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ gezeigt haben, also gerade die Eigenschaften eines kovarianten Funktors. ∎

Satz 7 (Hom$(M, -)$ ist linksexakt).
Ist $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3$ exakt, dann ist $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N_3)$ exakt. Das heisst $\mathrm{Hom}(M, -)$ ist linksexakt.

Beweis
Ohne Beweis. ∎

Schlussendlich wollen wir charakterisieren, wann $\mathrm{Hom}(M, -)$ gar exakt ist. Dazu benötigen wir folgenden Begriff

Definition 8 (Projektive Moduln).
Ein Modul P heisst projektiv, wenn für alle $\alpha : M \twoheadrightarrow N$, $\beta : P \to N$ Modulhomomorphismen eine Abbildung $\gamma : P \to M$ existiert, sodass $\beta = \alpha\gamma$, also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, two heads, "\alpha"] & N \end{tikzcd}$$

Anschaulich kann man Homomorphismen, welche von projektiven Moduln ausgehen, 'unter' Epimorphismen zurückziehen.

Satz 8 (Charakterisierungssatz projektiver Moduln).
Sei P ein R-Modul, folgende Aussagen sind dann äquivalent:

a) P ist projektiv.

b) Für jeden Epimorphismus $\alpha : M \twoheadrightarrow N$ ist die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}(P,-)\alpha : \mathrm{Hom}(P,M) \to \mathrm{Hom}(P,N)$ surjektiv. D. h. $\mathrm{Hom}(P,-)$ ist rechtsexakt.

c) Für ein Epimorphismus $\beta : F \twoheadrightarrow P$ und freiem Modul F, ist die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}(P,-)\beta$ surjektiv.

d) P ist ein direkter Summand eines freien Moduls.

e) Jeder Epimorphismus $\alpha : M \twoheadrightarrow P$ spaltet, d. h. es gibt ein $\beta : P \to M$, sodass $\alpha\beta = \mathrm{Id}_P$.

Beweis
a) $\Leftrightarrow$ *b)*: Einfache Umformulierung der 'Zurückzieheigenschaft'.
b) $\Rightarrow$ *c)*: Spezialfall.
c) $\Rightarrow$ *d)*: Es existiert ein $\beta : F \twoheadrightarrow P$ ($F = \oplus_{p\in P} R$ im Extremfall) mit freiem F. Damit greift aber die Voraussetzung und es existiert ein $\alpha : P \to F$ mit $\mathrm{Id}_P = \beta\alpha$. Damit spaltet aber die exakte Sequenz nach Satz 3

$$0 \longrightarrow \ker\beta \xrightarrow{\mathrm{Id}} F \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$$

0 und $F = P \oplus \ker\beta$.
d) $\Rightarrow$ *b)*: Wir können $F = P \oplus N_2$ mit F frei schreiben. Es gilt nun

$$\mathrm{Hom}(F,-) = \mathrm{Hom}(P \oplus N_2,-) = \mathrm{Hom}(P,-) \oplus \mathrm{Hom}(N_2,-)$$

damit reicht es, dass für $\alpha : M \twoheadrightarrow N$ die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}(F,M) \to \mathrm{Hom}(F,N)$ surjektiv ist. Das gilt aber, da wir die Bilder unter eines $f \in \mathrm{Hom}(F,N)$ unter einem Erzeugendensystem von F mit α zurückziehen können.
Es fehlt nur noch die Äquivalenz zu *e)*:
e) $\Rightarrow$ *d)*: Wieder nach Satz 3.
a) $\Rightarrow$ *e)*: Direktes anwenden der Definition:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists\beta"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_P"] \\ M \arrow[r, "\alpha"] & P \end{tikzcd}$$

■

Korollar 1.
Exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

spalten genau dann wenn P projektiv ist und das genau dann wenn $\mathrm{Hom}(P, -)$ exakt ist.

Satz 9 (Freie vs projektive Moduln).
Freie Moduln sind immer projektiv. Projektive Moduln über lokale oder Hauptidealringe sind frei.

Beweis
Ohne Beweis. ■

Bemerkung: Man kann auch den kontravarianten Funktor $F := \mathrm{Hom}(-, N)$ betrachten. Dieser ist immer linksexakt und exakt gdw. N ein sogenannter injektiver Modul ist. Dies ist der duale Begriff zur Projektivität.

Satzverzeichnis

Literatur

[1] Atiyah, M. ; McDonald, I. G.: *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969

[2] Eisenbud, David: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 150: *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo-Hong Kong-Barcelona-Budapest : Springer-Verlag, 1994. – xvi,785 S.

[3] Lane, Saunders M.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 5: *Categories for the Working Mathematician*. New York, NY : Springer-Verlag, 1971

[4] Thomas, Sebastian: *Vorlesung Kommutative Algebra*. `http://www.sigma-mathematics.de/semester6/komalg/`. Version: 2006. – [Vorlesung gehalten von Prof. Dr. Eva Zerz an der RWTH Aachen im Wintersemester 2005/06]